תורת החוגים - תרגיל 2

אם לא נאמר אחרת R הוא חוג ו-R-מודול אומר R-מודול ימני.

שאלה 1. יהיו $M,N\in Mod\text{-}R$, יהי $K\leq M$ ויהי $f\in Hom_R(M,N)$.
הוכיחו כי $f(K):=\{f(x)\mid x\in M\}$ תת-מודול של N.

שאלה 2. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם ה-II: יהי M R-מודול ו-$N,K\leq M$
אז יש איזומורפיזם $\varphi: N/(N\cap K)\longrightarrow (N+K)/K$ המוגדר על ידי
$\varphi(x+(N\cap K))=x+K$.

שאלה 3. יהי M R-מודול. לפי משפט מההרצאה, יש התאמה
חח"ע ועל בין $Hom_R\left(\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix},\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}\right)$ לבין $M_2(End_R(M))$.

(א) מצאו את $\varphi:\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}$ המתאים למטריצה $\begin{bmatrix}id_M & id_M\\ id_M & 0\end{bmatrix}$,
כלומר, מצאו את $\varphi\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ לכל $x,y\in M$.

(ב) נגדיר $\alpha,\beta:\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}$ על ידי $\alpha\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ ו-$\beta\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$.
הוכיחו כי $\alpha,\beta\in End_R\left(\begin{bmatrix}M\\M\end{bmatrix}\right)$.

(ג) מצאו את המטריצות ב-$M_2(End_R(M))$ המתאימות ל-α ול-β.

שאלה 4. (א) יהי M R-מודול עם בסיס B. תהי $C\subseteq B$ קבוצה סופית
ויהיו $\{r_b\}_{b\in C}$ איברים ב-R כך ש-$\sum_{b\in C} b\cdot r_b=0$,
הוכיחו כי $r_b=0$ לכל $b\in C$.

(ב) הוכיחו בעזרת סעיף (א) או בכל דרך אחרת
כי $\mathbb{Q}$ אינו $\mathbb{Z}$-מודול חופשי.

שאלה 5. יהי F שדה ויהי $R=\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$.

(א) הוכיחו כי $I_1=\begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ ו-$I_2=\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ הם אידיאלים ימניים מקסימליים של R. (**רמז:** שיקולי מימד)

(ב) הראו כי $\mathrm{Hom}_R(R/I_1, R/I_2)=0$.

שאלה 6. הוכיחו את סעיף (ב) של המשפט על "ייצוג מטריציוני".
כלומר, לכל $\varphi \in \mathrm{Hom}_R\left(\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_t \end{bmatrix}\right)$ ולכל $\psi \in \mathrm{Hom}_R\left(\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_u \end{bmatrix}\right)$
עם מטריצות מתאימות $(\varphi_{ij})_{ij}$ ו-$(\psi_{ki})_{k,i}$ מתקיים שהמטריצה
המתאימה ל-$\psi \circ \varphi$ היא $\left(\sum_{i=1}^{t} \psi_{ki} \circ \varphi_{ij}\right)_{kj}$.

(המשפט הוצג בהרצאה ב- 17.3 וסעיף (א) הוכח ב- 21.3.)